Stille Reserven und Überschußbeteiligung

Darüber hinaus ist abzusehen, daß Rating-Agenturen und die Wirtschaftspresse Informationen über die stillen Reserven in die **Beurteilung der Leistungen der Versicherungsunternehmen**, insbesondere der Kapitallebensversicherungen, einfließen lassen. Aus Verbrauchersicht muß vor einer pauschalierenden Beurteilung des Einflusses der stillen Reserven auf die Produktqualität gewarnt werden. Einerseits vermitteln hohe stille Reserven dem potentiellen Versicherungsnehmer zwar ein Gefühl von Sicherheit, weil er erwarten kann, daß die stillen Reserven bei einem Rückgang des Kapitalanlageerfolgs aufgelöst werden. Andererseits können hohe stille Reserven gerade das Ergebnis eines Verzichts auf die Auflösung stiller Reserven sein. Es wäre daher falsch, hohe stille Reserven in der Gegenwart als Garantie für eine hohe Überschußbeteiligung der Versicherten in der Zukunft zu sehen. Ein Blick in die Vergangenheit beweist, daß einige Lebensversicherungsunternehmen mit gegenwärtig überdurchschnittlich hohen stillen Reserven bei ihren Lebensversicherungsverträgen unterdurchschnittliche Renditen aufweisen und umgekehrt (vgl. Surminski 1998, S. 186).

Literaturempfehlungen:

GDV (Gesamtverband der deutschen Versicherungswirtschaft): Jahrbuch 1997: Die deutsche Versicherungswirtschaft. Bonn 1997.

Geib, G.: Wie mißt man stille Reserven? In: Versicherungswirtschaft, 52. Jg. (1997), S. 1143 - 1148.

Hesberg, D.: Bilanzierung von Versicherungsunternehmen. In: Castan, E. u.a. (Hrsg.): Beck'sches Handbuch der Rechnungslegung. München 1987 ff., Beitrag Hesberg 1996.

Hesberg, D.: Rechnungslegungspolitik von Versicherungsunternehmen. In: Freidank, C.-C. (Hrsg.): Rechnungslegungspolitik: Eine Bestandsaufnahme aus handels- und steuerrechtlicher Sicht. Berlin u.a. 1998, S. 687 - 761.

Küting, K.: Stille Reserven — ein betriebswirtschaftliches Phänomen: Bestandsaufnahme — Bedeutung — Perspektiven. In: Betriebs-Berater, 50. Jg. (1995), Beilage 15 zu Heft 38/1995.

Küting, K./Weber, C.-P.: Die Bilanzanalyse: Lehrbuch zur Beurteilung von Einzel- und Konzernabschlüssen. 3. Aufl., Stuttgart 1997.

o.V.: Stille Reserven. In: Zeitschrift für Versicherungswesen, 65. Jg. (1994), S. 224.

Rückle, D.: Rechnungslegung der Versicherungen und Überschußbeteiligung der Versicherten. In: Fischer, T.R./Hömberg, R. (Hrsg.): Jahresabschluß und Jahresabschlußprüfung: Probleme, Perspektiven, Internationale Einflüsse. Düsseldorf 1997, S. 279 - 306.

Rückle, D./Karst, O.: Das Kapitalanlagegeschäft im Jahresabschluß von Versicherungsunternehmen. In: WISU, 27. Jg. (1998), S. 1427 - 1434.

Seicht, G.: Stille Rücklagen I. In: Leffson, U./Rückle, D./Großfeld, B. (Hrsg.): Handwörterbuch unbestimmter Rechtsbegriffe im Bilanzrecht des HGB. Köln 1986, S. 281 - 286.

Surminski, M.: Der Tanz um die stillen Reserven. In: Zeitschrift für Versicherungswesen, 49. Jg. (1998), S. 186 - 187.

Wöhe, G.: Bilanzierung und Bilanzpolitik: Betriebswirtschaftlich — Handelsrechtlich — Steuerrechtlich. 9. Aufl., München 1997.

Die Beantwortung der Fragen erfolgt im WISU-Repetitorium.

Hauptstudium

Bestellmengenpolitiken bei stochastischer, stationärer Nachfrage (I)

Dr. Waldemar Toporowski, Köln

Die meisten Bestellmengenmodelle bilden die Bestellpolitik mit Hilfe weniger Parameter ab. Diese legen den Zeitpunkt einer Bestellung und die Bestellmenge fest. Hierzu zählen die Bestellpunkt- und Bestellzyklusverfahren, die als einstufige Ein-Produkt-Modelle mit stochastischer, stationärer Nachfrage charakterisiert werden können. In Abhängigkeit von der Wahl der Zielfunktion, der Definition von Fehlmengenkosten und Lieferservicegraden sowie dem eingeschlagenen Lösungsweg erhält man unterschiedliche Varianten dieser Modelle. In kompakter Form werden die häufig verbal diskutierten Gemeinsamkeiten und Unterschiede dieser Modelle formal dargestellt.

I. Einführung

Die stochastischen Bestellmengenmodelle werden üblicherweise mit Hilfe der folgenden vier Entscheidungsvariablen charakterisiert:

Modellparameter

s = Bestellpunkt = Bestand, bei dem eine Bestellung ausgelöst wird
r = Bestellzyklus = Zeitraum zwischen zwei Bestellungen
Q = Bestellmenge
S = Bestellniveau = Niveau bis zu dem der Bestand aufgefüllt wird

Während s bzw. r den **Zeitpunkt der Bestellung** steuert, entscheidet Q bzw. S über die **Bestellmenge.** Kombiniert man die beiden Arten von Parametern, so erhält man vier verschiedene Bestellmengenmodelle, die (s, Q)-, (r, Q)-, (s, S)- und (r, S)-Politik. Häufig wird in diesem Zusammenhang ein weiteres Modell genannt, das aus einer Kombination des (s, S)- und (r, S)-Modells entsteht und als (r, s, S)-Modell bezeichnet wird. In einem fest vorgegebenen Zeitabstand von r wird überprüft, ob der Bestand den Bestellpunkt s erreicht oder unterschritten hat. Ist das der Fall, wird der Bestand bis zum Bestellniveau S aufgestockt. Ansonsten unterbleibt eine Bestellung.

In den folgenden Abschnitten werden die (s, Q)-, die (r, S)- und die (r, s, S)-Politik diskutiert. Im Rahmen jeder Politik können unterschiedliche Annahmen bezüglich der Zielfunktion getroffen werden. Sie kann **Fehlmengenkosten** enthalten oder aber unter der Nebenbedingung optimiert werden, daß ein vorgegebener **Lieferservice** eingehalten wird. Sowohl für die Modellierung der Fehlmengenkosten als auch für die Definition des Lieferservice stehen unterschiedliche Möglichkeiten zur Verfügung. Die in einem früheren Beitrag (vgl. Toporowski 1998) allgemein dargestellten Optionen bei der Formulierung von Bestellmengenmodellen werden im folgenden konkretisiert. Die dabei entstehenden Modellvarianten werden formal dargestellt, der Lösungsweg zur Bestimmung der optimalen Parameter abgeleitet und anhand von Beispielen verdeutlicht. Die Modellvarianten lassen sich häufig nur mit Hilfe numerischer Verfahren exakt lösen. Neben einer exakten Lösung wird deshalb eine Näherungslösung vorgestellt, bei der die Modellparameter nicht simultan, sondern sukzessive bestimmt werden. Bei allen Modellvarianten werden der Back Ordering Fall und eine normalverteilte Nachfrage unterstellt. Zudem wird angenommen, daß die **Lagerkosten** proportional zum gebundenen Kapital und die **Bestellkosten** fix pro Bestellvorgang anfallen. Das entspricht der Grundstruktur des klassischen Bestellmengenmodells mit der **Gesamtkostenfunktion:**

$$(1) \qquad K_G = K_L + K_B = \frac{Q \cdot p \cdot L}{2} + \frac{B}{Q} \cdot A$$

mit K_L = Lagerkosten
K_B = Bestellkosten
p = Stückpreis [Geldeinheit (GE)/Mengeneinheit (ME)]
L = Lagerkostensatz in % des gebundenen Kapitals je Zeiteinheit (ZE) [%/ZE]
A = Kosten pro Bestellvorgang [GE]
B = Gesamtnachfrage im Planungszeitraum [ME/ZE]
Q = Bestellmenge [ME]

Klassische Bestellmengenformel

Sie nimmt ihr **Minimum** für

$$(2) \qquad Q = \sqrt{\frac{2 \cdot B \cdot A}{p \cdot L}}$$

an.

II. (s, Q)-Politik

1. Bestandsverlauf

Die (s, Q)-Politik unterstellt eine **kontinuierliche Bestandsüberwachung.** Zudem wird angenommen, daß eine einzelne Nachfragemenge genau eine Einheit beträgt. Nur so kann garantiert werden, daß bei einer kontinuierlichen Bestandsüberwachung zum Zeitpunkt der Bestellung der Bestand genau gleich dem **Bestellpunkt s** ist (vgl. Tempelmeier 1983, S. 160). Die bestellte **Menge Q** trifft am Ende der Wiederbeschaffungszeit ein. Die Länge der Wiederbeschaffungszeit kann als Zufallsvariable definiert werden (vgl. Silver/Peterson/Pyke 1998, S. 280 - 284). Im folgenden soll jedoch von einer deterministischen und bekannten Wiederbeschaffungszeit ausgegangen werden.

Vorteil der (s, Q)-Politik

Ein Vorteil der (s, Q)-Politik ist darin zu sehen, daß die Bestellmenge im Zeitablauf konstant bleibt, so daß Restriktionen bezüglich der Bestellmenge, die aus Lieferbedingungen oder aus logistischen Überlegungen resultieren (z.B. Transport- und Verpackungseinheiten), leicht berücksichtigt werden können. Die Abb. 1 verdeutlicht die Bestandsentwicklung bei Anwendung der (s, Q)-Politik.

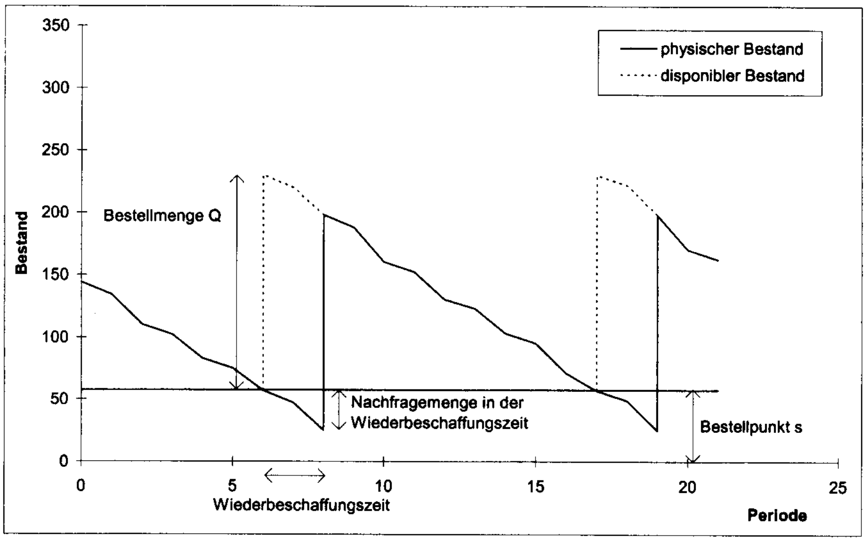

Abb. 1: Bestandsentwicklung bei Anwendung der (s, Q)-Politik

Zwischen dem Bestellzeitpunkt und dem Eintreffen der Ware reduziert sich der Bestand um die **mittlere Nachfrage** in der Wiederbeschaffungszeit. Unmittelbar vor dem Eintreffen einer Lieferung beträgt der Bestand folglich:

$$E(\text{Bestand vor der Lieferung}) = s - E(Y) = s - \mu_Y$$

mit Y = Nachfrage in der Wiederbeschaffungszeit, $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y)$

Die Lieferung erhöht den Bestand um Q. Unmittelbar nach dem Eintreffen der Lieferung beträgt der Bestand somit:

$$E(\text{Bestand nach der Lieferung}) = s - E(Y) + Q = s - \mu_Y + Q$$

Bei einem kontinuierlichen Warenabgang bedeutet das, daß der durchschnittliche Bestand die folgende Höhe aufweist:

Durchschnittlicher Bestand

$$E(\text{Bestand}) = s - \mu_Y + \frac{1}{2} \cdot [s - \mu_Y + Q - (s - \mu_Y)] = s - \mu_Y + \frac{1}{2} \cdot Q$$

Dabei wird unterstellt, daß der **Erwartungswert des Bestandes** vor und nach der Lieferung **nicht negativ** ist. Das bedeutet beispielsweise, daß der Bestellpunkt s die erwartete Nachfrage in der Wiederbeschaffungszeit decken soll. Die Annahme der Nichtnegativität, die inhaltlich naheliegend erscheint, die jedoch unter bestimmten Restriktionen nicht unbedingt kostenoptimal sein muß, soll auch für alle folgenden Modelle gelten. Sie vereinfacht die Analyse der Lagerkosten.

Gegenüber der Kostenfunktion (1), die der klassischen Bestellmengenformel zugrunde liegt, ändern sich die Lagerkosten wie folgt:

(3) $$K_L = \left(\frac{Q}{2} + s - \mu_Y\right) \cdot p \cdot L$$

Die Bestellkosten bleiben unverändert. Die Form der Gesamtkostenfunktion hängt davon ab, ob und wie Fehlmengenkosten bzw. ein Servicegrad definiert werden. Im folgenden werden vier Varianten des (s, Q)-Modells vorgestellt.

2. (s, Q)-Modell mit Fehlmengenkosten pro Fehlmengenereignis

Unterstellt man, daß **pro Fehlmengenereignis fixe Kosten** entstehen, so gilt für die Fehlmengenkosten im Planungszeitraum:

Fehlmengenkosten

(4) $$K_F = \frac{B}{Q} \cdot P(Y > s) \cdot F_1$$

mit P(Y>s) = Wahrscheinlichkeit, daß die Nachfrage in der Wiederbeschaffungszeit den Bestellpunkt s überschreitet
F_1 = fixe Kosten pro Fehlmengenereignis [GE]

Aus der Annahme, daß Y **normalverteilt** ist, d.h. $Y \sim N(\mu_Y, \sigma_Y)$, folgt:

$$(5)\qquad P(Y > s) = P\left(\frac{Y-\mu_Y}{\sigma_Y} > \frac{s-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) = 1 - \int_{-\infty}^{\frac{s-\mu_Y}{\sigma_Y}} f_u \, du = 1 - F_u\left(\frac{s-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)$$

mit f_u = Wahrscheinlichkeitsdichte der N(0, 1)-Verteilung
F_u = Verteilungsfunktion der N(0, 1)-Verteilung

Für die Gesamtkosten gilt dann:

Gesamtkosten

$$(6)\qquad K_G = K_L + K_B + K_F = \left(\frac{Q}{2} + s - \mu_Y\right) \cdot p \cdot L + \frac{B}{Q} \cdot A + \frac{B}{Q} \cdot \left[1 - F_u\left(\frac{s-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right] \cdot F_1$$

Die Gesamtkostenfunktion hängt von der **Bestellmenge** Q und dem **Bestellpunkt** s ab. Sie sind folglich so zu bestimmen, daß die Funktion (6) ihr Minimum annimmt. Man differenziert die Gesamtkostenfunktion nach Q und s. Für die partielle Ableitung nach Q gilt:

$$(7)\qquad \frac{\partial K_G}{\partial Q} = \frac{p \cdot L}{2} - \frac{B \cdot A}{Q^2} - \frac{B \cdot F_1}{Q^2} \cdot \left[1 - F_u\left(\frac{s-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right]$$

Nullsetzen der Ableitung und Auflösen nach Q ergibt die optimale Bestellmenge:

$$(8)\qquad Q = \sqrt{\frac{2 \cdot B \cdot \left\{A + F_1 \cdot \left[1 - F_u\left(\frac{s-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right]\right\}}{p \cdot L}}$$

Umgeformt erhält man:

Optimale Bestellmenge

$$(9)\qquad Q = Q^* \cdot \sqrt{1 + \frac{F_1}{A} \cdot \left[1 - F_u\left(\frac{s-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right]}$$

mit Q^* = optimale Bestellmenge nach der klassischen Bestellmengenformel

Differenziert man die Kostenfunktion (6) nach s, so erhält man:

$$(10)\qquad \frac{\partial K_G}{\partial s} = p \cdot L - \frac{B \cdot F_1}{Q} \cdot f_u\left(\frac{s-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) \cdot \frac{1}{\sigma_Y}$$

Dabei macht man sich die folgende Beziehung zunutze:

$$\frac{dF_u(z)}{dz} = f_u(z)$$

Setzt man die Ableitung (10) gleich Null, so folgt:

$$\frac{B \cdot F_1}{Q \cdot \sigma_Y} \cdot \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{s-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right] = p \cdot L$$

$$\Leftrightarrow \exp\left[-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{s-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2\right] = \frac{p \cdot L \cdot Q \cdot \sigma_Y \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}}{B \cdot F_1}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{s-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2 = 2 \cdot \ln\left(\frac{B \cdot F_1}{p \cdot L \cdot Q \cdot \sigma_Y \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}}\right)$$

Für $\frac{B \cdot F_1}{p \cdot L \cdot Q \cdot \sigma_Y \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \geq 1$ läßt sich die Gleichung weiter auflösen, und man erhält den optimalen Bestellpunkt:

Optimaler Bestellpunkt

$$(11)\qquad s = \mu_Y + \sigma_Y \cdot \sqrt{2 \cdot \ln\left(\frac{B \cdot F_1}{p \cdot L \cdot Q \cdot \sigma_Y \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}}\right)}$$

Ist $\frac{B \cdot F_1}{p \cdot L \cdot Q \cdot \sigma_Y \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} < 1$, so nimmt die Gesamtkostenfunktion (6) für den kleinsten zulässigen Bestellpunkt s ihr Minimum an. Unter der getroffenen Annahme, daß der Erwartungswert des Bestandes vor der Lieferung nicht negativ sein darf, minimiert $s = \mu_Y$ die Gesamtkosten. Dieser Fall soll hier nicht weiter betrachtet werden (vgl. Silver/Peterson/Pyke 1998, S. 295 - 298).

Löst man die Gleichungen (9) und (11) simultan auf, so erhält man die kostenminimalen Parameter Q und s. Hierzu benötigt man ein **numerisches Verfahren**.

Alternativ dazu kann eine **Näherungslösung** ermittelt werden, indem man Q und s **sukzessive** bestimmt. Hierbei wird zuerst die Bestellmenge Q nach der klassischen Bestellmengenformel (2) ermittelt und anschließend der optimale Bestellpunkt s aus Gleichung (11) errechnet. Diese Vorgehensweise führt zu einer Erhöhung der Gesamtkosten gegenüber einer simultanen Lösung.

3. (s, Q)-Modell mit vorgegebenem α-Lieferservice

Erfaßt man keine Fehlmengenkosten, sondern fordert statt dessen das **Einhalten eines vorgegebenen Lieferservicegrades**, so ist die Kostenfunktion

Gesamtkosten

$$(12)\qquad K_G = K_L + K_B = \left(\frac{Q}{2} + s - \mu_Y\right) \cdot p \cdot L + \frac{B}{Q} \cdot A,$$

in der gegenüber der Formel (6) keine Fehlmengenkosten vorkommen, unter einer Nebenbedingung zu minimieren. Wird ein **α-Servicegrad** vorgegeben und beschreibt $P(Y > s)$ die Wahrscheinlichkeit, daß die Nachfrage in der Wiederbeschaffungszeit größer als der Bestellpunkt s ausfällt, so lautet die Nebenbedingung:

$$P(Y > s) = 1 - \alpha$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in einem Bestellzyklus eine Fehlmenge vorkommt, soll auf $1 - \alpha$ beschränkt werden. Umgeformt erhält man

$$P(Y > s) = P\left(\frac{Y - \mu_Y}{\sigma_Y} > \frac{s - \mu_Y}{\sigma_Y}\right) = 1 - \int_{-\infty}^{\frac{s-\mu_Y}{\sigma_Y}} f_u \, du = 1 - F_u\left(\frac{s - \mu_Y}{\sigma_Y}\right) = 1 - \alpha,$$

woraus

$$\frac{s - \mu_Y}{\sigma_Y} = u_\alpha$$

mit u_α = α-Quantil der N(0, 1)-Verteilung

folgt. Damit ergibt sich:

Optimaler Bestellpunkt

$$(13)\qquad s = \mu_Y + u_\alpha \cdot \sigma_Y$$

Der **Bestellpunkt s** ist gleich der mittleren Nachfrage in der Wiederbeschaffungszeit und einem Sicherheitsbestand, der von dem geforderten Servicegrad α und der Schwankung der Nachfrage in der Wiederbeschaffungszeit abhängt. s ist unabhängig von der Bestellmenge Q, d.h., s wird allein aus der Gleichung (13) bestimmt. Das Minimum der Gesamtkostenfunktion (12) hängt dann nur noch von dem Parameter Q ab. Differenziert man die Kostenfunktion (12) nach Q, so erhält man die **klassische Bestellmengenformel** (2) als Lösung des Minimierungsproblems. Die Bestellmenge und der Bestellpunkt können folglich sukzessive bestimmt werden.

4. (s, Q)-Modell mit Fehlmengenkosten, die proportional zum Wert der Fehlmenge sind

Nimmt man an, daß die Fehlmengenkosten proportional zum Wert der Fehlmenge sind, so muß zuerst die Höhe der Fehlmenge ermittelt werden, um die Gesamtkostenfunktion zu definieren. Für den **Erwartungswert der Fehlmenge pro Bestellzyklus** gilt:

$$(14)\qquad E(\text{Fehlmenge}) = \int_s^\infty (y - s) \cdot f_Y \, dy = \sigma_Y \int_{\frac{s-\mu_Y}{\sigma_Y}}^\infty \left(u - \frac{s - \mu_Y}{\sigma_Y}\right) \cdot f_u \, du$$

mit f_Y = Wahrscheinlichkeitsdichte der $N(\mu_Y, \sigma_Y)$-Verteilung
f_u = Wahrscheinlichkeitsdichte der N(0, 1)-Verteilung

Definiert man die Funktion (vgl. Silver/Peterson/Pyke 1998, S. 225)

$$(15)\qquad G_u(k) := \int_k^\infty (u - k) \cdot f_u \, du,$$

von der man zeigen kann, daß sie die **Eigenschaft**

$$(16) \qquad G_u(k) = f_u(k) - k \cdot [1 - F_u(k)]$$

besitzt, so folgt daraus für die Fehlmenge (14):

$$(17) \qquad E(\text{Fehlmenge}) = \sigma_Y \int_{\frac{s-\mu_Y}{\sigma_Y}}^{\infty} \left(u - \frac{s-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) \cdot f_u \, du = \sigma_Y \cdot G_u\left(\frac{s-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)$$

Da die **Fehlmengenkosten proportional zum Wert der Fehlmenge** sind, nehmen sie im Planungszeitraum die folgende Höhe an:

$$(18) \qquad K_F = \frac{B}{Q} \cdot \sigma_Y \cdot G_u\left(\frac{s-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) \cdot p \cdot F_2$$

mit F_2 = Fehlmengenkosten pro Werteinheit der Fehlmenge

Dabei beschreibt der Ausdruck $\frac{B}{Q}$ die Anzahl der Bestellzyklen im Planungszeitraum und $\sigma_Y \cdot G_u\left(\frac{s-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) \cdot p$ die **wertmäßige Höhe der Fehlmenge** pro Bestellzyklus.

Für die Gesamtkosten erhält man:

Gesamtkosten

$$(19) \qquad K_G = K_L + K_B + K_F = \left(\frac{Q}{2} + s - \mu_Y\right) \cdot p \cdot L + \frac{B}{Q} \cdot A + \frac{B}{Q} \cdot \sigma_Y \cdot G_u\left(\frac{s-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) \cdot p \cdot F_2$$

Von der Kostenfunktion (6) unterscheidet sich die Kostenfunktion (19) nur im letzten Summanden. Differenziert man sie nach Q und setzt die Ableitung gleich Null, so folgt:

Optimale Bestellmenge

$$(20) \qquad Q = Q^* \cdot \sqrt{1 + \frac{F_2}{A} \cdot \sigma_Y \cdot G_u\left(\frac{s-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)}$$

Aus der Darstellung (16) folgt für die Ableitung der Funktion G_u:

$$(21) \qquad \frac{dG_u(k)}{dk} = \frac{df_u(k)}{dk} - [1 - F_u(k)] - k \cdot \left[-\frac{dF_u(k)}{dk}\right]$$

$$= -k \cdot f_u(k) - [1 - F_u(k)] + k \cdot f_u(k) = -[1 - F_u(k)]$$

Differenziert man die Kostenfunktion (19) nach s und benutzt die Formel (21), so gilt:

$$(22) \qquad \frac{\partial K_G}{\partial s} = p \cdot L - \frac{B \cdot p \cdot F_2}{Q} \cdot \sigma_Y \cdot \left[1 - F_u\left(\frac{s-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)\right] \cdot \frac{1}{\sigma_Y}$$

Daraus folgt:

$$(23) \qquad F_u\left(\frac{s-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) = 1 - \frac{Q \cdot L}{B \cdot F_2}$$

Diese Gleichung ist für $\frac{Q \cdot L}{B \cdot F_2} \leq 1$ lösbar. Ist die Bedingung verletzt, minimiert der kleinste zulässige Bestellpunkt s die Gesamtkosten. Ein **simultanes Lösen** der Gleichungen (20) und (23) mit Hilfe eines numerischen Verfahrens liefert die optimale **Bestellmenge Q** und den optimalen **Bestellpunkt s.**

Das Minimierungsproblem wird wiederum vereinfacht, wenn die Parameter näherungsweise sukzessive bestimmt werden. In diesem Fall wird ebenfalls die klassische Bestellmengenformel (2) herangezogen, um Q zu berechnen. Der Bestellpunkt kann dann aus Gleichung (23) ermittelt werden.

5. (s, Q)-Modell mit vorgegebenem β-Lieferservice

Wird kein α-, sondern ein **β-Servicegrad** vorgegeben, so lautet die Nebenbedingung unter der die Gesamtkostenfunktion

Gesamtkosten

$$(24) \qquad K_G = K_L + K_B = \left(\frac{Q}{2} + s - \mu_Y\right) \cdot p \cdot L + \frac{B}{Q} \cdot A$$

minimiert werden muß:

$$(25) \qquad \frac{E(\text{Fehlmenge})}{E(\text{Bedarf})} = 1 - \beta$$

Das bedeutet, daß der erwartete Anteil der Fehlmenge an der Nachfrage in einem Bestellzyklus $1 - \beta$ betragen soll. Im Back Ordering Fall wird in einem Bestellzyklus im Durchschnitt die Menge Q nachgefragt. Die Nebenbedingung erhält somit die folgende Form:

$$(26) \qquad \frac{\sigma_Y \cdot G_u\left(\frac{s-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)}{Q} = 1 - \beta$$

Die Minimierungsaufgabe kann mit dem **Lagrange-Ansatz** gelöst werden. Er liefert das folgende **Gleichungssystem**, aus dem die Parameter Q, s und λ bestimmt werden können:

Gleichungssystem zur Bestimmung von Q, s und λ

$$(27) \qquad Q = Q^* \cdot \sqrt{1 + \frac{\lambda \cdot \sigma_Y \cdot G_u\left(\frac{s-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)}{B \cdot A}}$$

$$(28) \qquad F_u\left(\frac{s-\mu_Y}{\sigma_Y}\right) = 1 - \frac{p \cdot L \cdot Q}{\lambda}$$

$$(29) \qquad \frac{\sigma_Y \cdot G_u\left(\frac{s-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)}{Q} = 1 - \beta$$

mit Q^* = optimale Bestellmenge nach der klassischen Bestellmengenformel

Zur Lösung kann man sich wiederum eines numerischen Verfahrens bedienen. Mit $Q = Q^*$ als Startwert können s aus Gleichung (29), λ aus Gleichung (28) und Q aus Gleichung (27) iterativ berechnet werden.

Eine Näherungslösung erhält man, wenn zuerst Q nach der klassischen Bestellmengenformel (2) und dann s aus Gleichung (29) bestimmt werden.

Frage 1: Welche Unterschiede bestehen zwischen den Ansätzen zur Lösung der Modelle mit Fehlmengenkosten einerseits und mit einem vorgegebenen Servicegrad andererseits?

Frage 2: Auf welchem Prinzip beruhen die Näherungslösungen der (s, Q)-Modellvarianten?

6. Beispiel

Welche Ergebnisse die vier Varianten der (s, Q)-Politik liefern, soll ein Beispiel verdeutlichen. Für die folgenden Zahlen:

B = 2.500 ME/Jahr
A = 5 GE
p = 40 GE/ME
L = 25%/Jahr
μ_Y = 50 ME
σ_Y = 30 ME
α = 95%
β = 95%
F_1 = 60 GE
F_2 = 0,04

erhält man die in Tab. 1 abgebildeten Lösungen. Es werden sowohl die **exakte Lösung**, die aus einer simultanen Bestimmung der Bestellmenge und des Bestellpunktes resultiert, als auch die leichter zu ermittelnde **sukzessive Lösung** angegeben. Die Zahlen in Klammern entsprechen den Nummern der jeweils verwendeten Formeln.

Lösungen des Beispiels

Modell	simultane Lösung					sukzessive Lösung				
	Q	s	K_G	α	β	Q	s	K_G	α	β
fixe Kosten	68,12 (9)	93,98 (11)	1120,96 (6)	92,9%	98,6%	50,00 (2)	99,91 (11)	1143,37 (6)	95,2%	98,8%
vorg. α-Serv.	50,00 (2)	99,35 (13)	993,46 (12)	95,0%	98,7%	50,00 (2)	99,35 (13)	993,46 (12)	95,0%	98,7%
prop. Kosten	68,59 (20)	78,45 (23)	970,37 (19)	82,9%	96,0%	50,00 (2)	84,51 (23)	994,05 (19)	87,5%	96,3%
vorg. β-Serv.	69,97 (27)(28)	74,59 (29)	773,64 (24)	79,4%	95,0%	50,00 (2)	80,00 (29)	799,97 (24)	84,1%	95,0%

Tab. 1: Simultane und sukzessive Lösung im (s, Q)-Modell

Zielsetzung innerhalb der (s, Q)-Politik muß klar definiert sein

Die Tab. 1 zeigt, daß die beiden gesuchten Optimierungsparameter Bestellmenge Q und Bestellpunkt s in den verschiedenen Varianten der (s, Q)-Politik unterschiedliche Werte aufweisen. Diese Tatsache verdeutlicht, daß es wichtig ist, die Zielsetzung innerhalb der (s, Q)-Politik klar zu definieren. Abhängig davon, ob Fehlmengenkosten erfaßt werden oder statt dessen ein Servicegrad vorgegeben wird, unterscheiden sich die optimalen Werte von Q und s. Sie differieren außerdem in Abhängigkeit von der Art der Fehlmengenkosten bzw. von der Art des Lieferservice. Ein Vergleich zwischen den simultan und sukzessive bestimmten Werten zeigt, daß sich die Kosten um ca. 2 - 3,5% erhöhen, wenn die klassische Bestellmengenformel zur Lösung herangezogen wird. Lediglich bei einem vorgegebenem α-Servicegrad unterscheidet sich die sukzessive bestimmte Lösung nicht von der simultanen.

Frage 3: Wie ist eine sukzessive Bestimmung der optimalen Parameter der Bestellpolitik zu beurteilen?

Literaturempfehlungen:

Günther, H.-O./Tempelmeier, H.: Produktion und Logistik. 3. Aufl., Berlin u.a. 1997.

Lee, H.L./Nahmias, S.: Single Product, Single-Location Models. In: Graves, S.C./Rinnooy Kann, A.H.G. Zipkin, P.H. (eds.): Logistics of Production and Inventory. Amsterdam et al. 1993, S. 3 - 55.

Robrade, A.D.: Dynamische Einprodukt-Lagerhaltungsmodelle bei periodischer Bestandsüberwachung. Heidelberg 1990.

Schneeweiß, C.: Modellierung industrieller Lagerhaltungssysteme: Einführung und Fallstudien. Berlin Heidelberg/New York 1981.

Schneider, H.: Effect of service-levels on order-points or order-levels in inventory models. In: International Journal of Production Research, Vol. 19 (1981), S. 615 - 631.

Silver, E.A./Peterson, R./Pyke, D.F.: Inventory Management and Production Planning and Scheduling. 3rd ed., New York et al. 1985.

Tempelmeier, H.: Quantitative Marketing-Logistik: Entscheidungsprobleme, Lösungsverfahren, EDV-Programme. Berlin u.a. 1983.

Tempelmeier, H.: Stochastische Lagerpolitiken. Ergänzendes Material zur Vorlesung Material-Logistik. Universität zu Köln, Seminar für Allgemeine Betriebswirtschaftslehre, Industriebetriebslehre und Produktionswirtschaft. Köln 1996.

Tijms, H.C./Groenevelt, H.: Simple approximations for the reorder point in periodic and continuous review (s, S) inventory systems with service level constraints. In: European Journal of Operational Research, Vol. 17 (1984), S. 175 - 190.

Toporowski, W.: Grundlagen der Bestellpunkt- und Bestellzyklusverfahren. In: WISU, 27. Jg. (1998), S. 1142 - 1154.

Fortsetzung im nächsten Heft.

Die Beantwortung der Fragen erfolgt im WISU-Repetitorium.

Lösungen des WISU-Check up Seite 187:

1 a,d,e 2 a,b,c 3 a 4 b,d,f 5 b,c 6 a,b 7 a,c,d 8 c,d,e 9 — 10 — 11 a,b,c 12 b,c,e 13 — 14 d 15 a,b,c 16 a,b,c 17 a,d,e 18 — 19 —